1

根据双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$研究它的几何性质.

1. **范围** $x\geqslant a$ 与 $x\leqslant -a$

2. **对称性** 既是轴对称图形，又是中心对称图形

3. **顶点与实轴、虚轴**

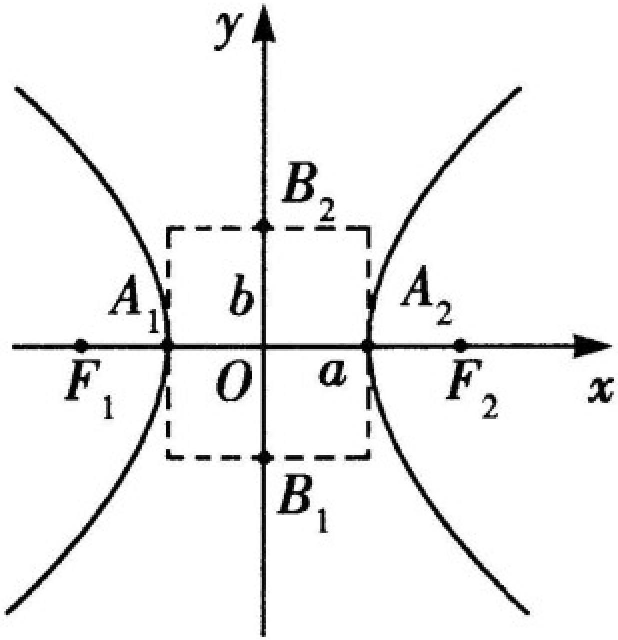
(1)顶点

双曲线和它的对称轴的交点叫做双曲线的顶点.

(2)实轴、虚轴

线段 A_1A_2 叫做双曲线的实轴，它的长等于 $2a$，a 叫做双曲线的实半轴长；

线段 B_1B_2 叫做双曲线的虚轴，它的长等于 $2b$，b 叫做双曲线的虚半轴长.



4. 渐近线

通过观察双曲线的图形可以看出，当双曲线的各支向外延伸时，与两条直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 逐渐接近，但永不相交，我们把这两条直线称为双曲线的渐近线.

1. 双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两条渐近线的方程为 $\underline{\quad y=\pm\dfrac{3}{4}x\quad}$

5. 离心率

$e=\dfrac{c}{a}$ 离心率 e 可以用来表示双曲线开口的程度

□□□ 2 □□□□□□□□□□□□□

1. 直线与双曲线的位置关系的判断

一般地，设直线方程为 $y=kx+m\ (m\neq 0)$，双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，将 $y=kx+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，消去 y 并化简，得

$$(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2mkx-a^2m^2-a^2b^2=0.$$

①当 $b^2-a^2k^2=0$，即 $k=\pm\dfrac{b}{a}$ 时，直线与渐近线平行，则直线与双曲线只有一个公共点.

②当 $b^2-a^2k^2\neq 0$，即 $k\neq\pm\dfrac{b}{a}$ 时，判别式 $\Delta>0\Leftrightarrow$ 直线与双曲线相交，有两个公共点；判别式 $\Delta=0\Leftrightarrow$ 直线与双曲线相切，有且只有一个公共点；判别式 $\Delta<0\Leftrightarrow$ 直线与双曲线相离，没有公共点.

2. 直线 $3x-4y=0$ 与双曲线 $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$ 的交点个数是 **0** □

2. 双曲线的通径

过焦点的弦长（焦点弦）的最值

若焦点弦与双曲线的交点在同一支上，则最短弦长是通径长 $\dfrac{2b^2}{a}$；若焦点弦与双曲线的交点在两支上，则焦点弦的最短弦长是 $2a$.

□□□3□□□□□□□□□□□□□

1. 实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线，等轴双曲线有如下性质：

(1)方程形式为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$；

(2)渐近线方程为 $y=\pm x$，它们互相垂直，并且平分双曲线实轴和虚轴所成的角；

(3)实轴长和虚轴长相等，离心率 $e=\sqrt{2}$.

2. 以已知双曲线的虚轴为实轴，实轴为虚轴的双曲线，与原双曲线是一对共轭双曲线. 例如，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$ 是一对共轭双曲线，其性质如下：

(1)两个共轭双曲线有相同的渐近线；

(2)两个共轭双曲线有相同的焦距；

(3) 由于 $e_1=\frac{c}{a}, e_2=\frac{c}{b}$，则 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$，可知，共轭双曲线的离心率不同，但离心率倒数的平方和等于常数 1.

□□□ 4 □□□□□□□□□□

1. 双曲线的第二定义和第三定义

双曲线的第二定义： $\{P \mid \frac{|PF|}{d}=e, e>1, F\notin l$，其中 F 为定点，l 为定直线，e 为离心率，d 为点 P 到直线 l 的距离$\}$.

双曲线的第三定义： $\{P \mid k_{PA}\cdot k_{PB}=e^2-1, e>1$，其中 k_{PA}, k_{PB} 分别表示点 P 与两定点 A, B 连线的斜率，e 为离心率$\}$.

2. 椭圆、双曲线几何性质的统一性

焦半径 r_1, r_2 与点 P 坐标的关系	$r_1 = a + ex_P, r_2 = a - ex_P$	当点 P 在双曲线右支上时，$r_1 = ex_P + a, r_2 = ex_P - a$；当点 P 在双曲线左支上时，$r_1 = -ex_P - a, r_2 = -ex_P + a$
$\angle F_2PF_1 = \theta$, $\angle PF_1F_2 = \alpha$, $\angle PF_2F_1 = \beta$	$1 + \cos\theta = \dfrac{2b^2}{r_1 r_2}$, $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan\dfrac{\theta}{2} = c\lvert y_P\rvert$	$1 - \cos\theta = \dfrac{2b^2}{r_1 r_2}$, $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \cot\dfrac{\theta}{2} = c\lvert y_P\rvert$
离心率与 α, β 的关系	$e = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}$	$e = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\lvert\sin\alpha - \sin\beta\rvert}$

3. 下列有关双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$与$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$的说法正确的是

答案▶C

A. 两个双曲线有公共顶点　　C. 两个双曲线有公共渐近线

B. 两个双曲线有公共焦点　　D. 两个双曲线的离心率相等

4. 已知双曲线两渐近线的夹角为60°,则双曲线的离心率为________.　2 或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. (2013·北京)若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$\sqrt{3}$,则其渐近线方程为　$y=\pm\sqrt{2}x$.

6. 求满足下列条件的双曲线的标准方程:

(1)以直线$2x\pm3y=0$为渐近线,过点(1,2);　$\frac{y^2}{\frac{32}{9}}-\frac{x^2}{8}=1$

(2)两顶点间的距离是6,两焦点的连线被两顶点和中心四等分;

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 或$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$

(3)过点(2,0),与双曲线 $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{16}=1$ 离心率相等; $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

(4)与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 有公共焦点,离心率为$\frac{3}{2}$. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

7. (2011 · 山东)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线均和圆 $C:x^2+y^2-6x+5=0$ 相切,且双曲线的右焦点为圆 C 的圆心,则该双曲线的方程为 (**A**)

A. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

C. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

8. （2016 · 佛山二模）已知双曲线 C 的两条渐近线为 l_1，l_2，过右焦点 F 作 $FB // l_1$ 且交 l_2 于点 B，过点 B 作 $BA \perp l_2$ 且交 l_1 于点 A. 若 $AF \perp x$ 轴，则双曲线 C 的离心率为

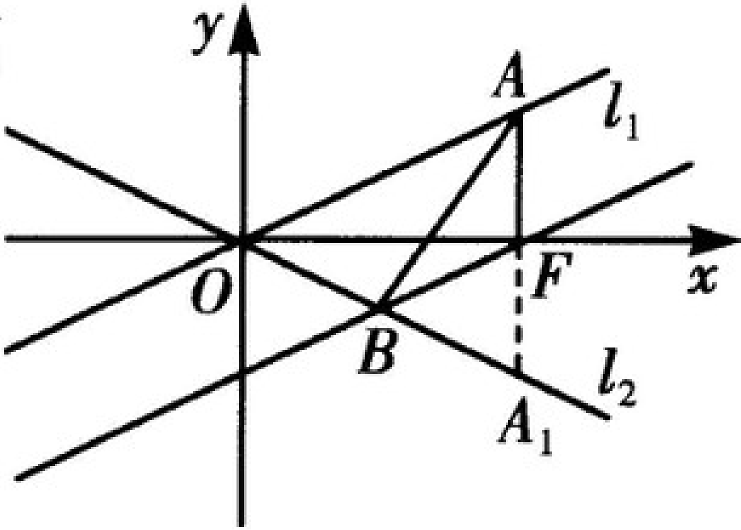


图 2.3.2 −8

A. $\sqrt{3}$ B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

(9.) 设双曲线的一个焦点为 F，虚轴的一个端点为 B，如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直，那么此双曲线的离心率为______. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

10. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0),F_2(c,0)$. 若双曲线上存在点$P$使$\frac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\frac{a}{c}$,则该双曲线的离心率的取值范围是$\underline{\quad e\in(1,\sqrt{2}+1)\quad}$.

11. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$,点$P$在双曲线的右支上,且$|PF_1|=4|PF_2|$,则此双曲线的离心率$e$的最大值为

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$ ✓　　C. 2　　D. $\frac{7}{3}$

12. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$P$ 为双曲线左支上任意一点，若$\frac{|PF_2|^2}{|PF_1|}$的最小值为 $8a$，则双曲线离心率 e 的取值范围是

A. $(1,+\infty)$　B. $(0,3]$　C. $(1,3]$ ✔　D. $(1,2]$

13. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与直线 $y=2x$ 无交点，则离心率 e 的取值范围是

A. $(1,2)$　B. $(1,2]$　C. $(1,\sqrt{5})$　D. $(1,\sqrt{5}]$ ✔

14. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两焦点，以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2，若边 MF_1 的中点在双曲线上，则双曲线的离心率是 （ **D** ）

A. $4+2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}-1$　　C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\sqrt{3}+1$

15. 已知直线 $y=kx$ 与双曲线 $4x^2-y^2=16$. 当 k 为何值时直线与双曲线：

(1)有两个公共点？ (2)有一个公共点？ (3)没有公共点？

解析▶ 由 $\begin{cases} y=kx, \\ 4x^2-y^2=16 \end{cases}$ 消去 y，得 $(4-k^2)x^2-16=0$ （ * ）.

当 $4-k^2=0$，即 $k=\pm2$ 时，方程（ * ）无解；

当 $4-k^2\neq0$ 时，$\Delta=-4(4-k^2)(-16)=64(4-k^2)$，

当 $\Delta>0$，即 $-2<k<2$ 时，方程（ * ）有两解；

当 $\Delta<0$，即 $k<-2$ 或 $k>2$ 时，方程（ * ）无解；

当 $\Delta=0$，且 $4-k^2\neq0$ 时，不存在这样的 k 值.

综上所述，(1) 当 $-2<k<2$ 时，直线与双曲线有两个公共点；

(2) 不存在使直线与双曲线有一个公共点的 k 值；

(3) 当 $k\leqslant-2$ 或 $k\geqslant2$ 时，直线与双曲线没有公共点.

16. 直线 $y=ax+1$ 与双曲线 $3x^2-y^2=1$ 相交于 A,B 两点

(1)求线段 AB 的长;

(2)当 a 为何值时,以 AB 为直径的圆经过坐标原点?

解析▶ 由 $\begin{cases} y=ax+1, \\ 3x^2-y^2=1, \end{cases}$ 得 $(3-a^2)x^2-2ax-2=0.$

由题意可得 $3-a^2\neq 0.$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\dfrac{2a}{3-a^2},x_1x_2=\dfrac{-2}{3-a^2}.$

(1) $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+a^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=$

$\sqrt{(1+a^2)[(\dfrac{2a}{3-a^2})^2+\dfrac{8}{3-a^2}]}=\dfrac{2\sqrt{(1+a^2)(6-a^2)}}{|3-a^2|}.$

(2) 由题意知, $OA \perp OB$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 即 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

$\therefore x_1x_2 + (ax_1 + 1)(ax_2 + 1) = 0$.

即 $(1 + a^2)x_1x_2 + a(x_1 + x_2) + 1 = 0$,

$\therefore (1 + a^2) \cdot \dfrac{-2}{3 - a^2} + a \cdot \dfrac{2a}{3 - a^2} + 1 = 0$, 解得 $a = \pm 1$.

经检验 $a = \pm 1$ 时, 以 AB 为直径的圆经过坐标原点.

17. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 求过点 $A(3, -1)$, 且被点 A 平分的双曲线的弦 MN 所在直线的方程.

解析▶ 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 因为 M, N 均在双曲线上,

所以$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}-y_1^2=1,\\ \dfrac{x_2^2}{4}-y_2^2=1,\end{cases}$两式相减，得$\dfrac{x_2^2-x_1^2}{4}=y_2^2-y_1^2$，

所以$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{x_2+x_1}{4(y_2+y_1)}$.

因为点A平分弦MN，所以$x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=-2$.

所以$k_{MN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{x_2+x_1}{4(y_2+y_1)}=-\dfrac{3}{4}$.

所以双曲线的弦MN所在直线的方程为$y+1=-\dfrac{3}{4}(x-3)$，

即$3x+4y-5=0$.

18. 求过定点(0,1)的直线被双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 截得的弦的中点的轨迹方程.

解析▶ 因为该直线的斜率不存在时与双曲线无交点,故可设直线的方程为 $y=kx+1$,它被双曲线截得的弦 AB 对应的中点为 $P(x,y)$.

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2-\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得 $(4-k^2)x^2-2kx-5=0$.

设此方程的解为 x_1,x_2,则 $4-k^2\neq 0$,即 $k\neq\pm 2$,且 $\Delta=4k^2+20(4-k^2)>0$,

$\therefore 16k^2<80$,即 $|k|<\sqrt{5}$,$k\neq\pm 2$,且 $x_1+x_2=\frac{2k}{4-k^2}$,$x_1x_2=$

$-\frac{5}{4-k^2}$，$\therefore x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{k}{4-k^2}$，$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{k}{2}(x_1+x_2)+1=\frac{4}{4-k^2}$. 由 $\begin{cases} x=\frac{k}{4-k^2}, \\ y=\frac{4}{4-k^2} \end{cases}$ 消去 k 得 $4x^2-y^2+y=0(y<-4$ 或 $y\geq 1)$.

19. 已知双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\frac{2}{3}x$，焦距为 $2\sqrt{26}$，求双曲线的标准方程.

$$\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1 \quad 或 \quad \frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{18}=1$$

20. 若点 O 和点 $F(-2,0)$ 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的中心和左焦点，点 P 为双曲线右支上的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的取值范围为

A. $[3-2\sqrt{3},+\infty)$　　B. $[3+2\sqrt{3},+\infty)$

C. $[-\frac{7}{4},+\infty)$　　D. $[\frac{7}{4},+\infty)$

解析▶ 因为 $F(-2,0)$ 是已知双曲线的左焦点，所以 $a^2+1=4$，即 $a^2=3$，所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. 设点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0\geqslant\sqrt{3})$，则 $\frac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$ $(x_0\geqslant\sqrt{3})$，可得 $y_0^2=\frac{x_0^2}{3}-1(x_0\geqslant\sqrt{3})$，

易知$\overrightarrow{FP}=(x_0+2,y_0)$，$\overrightarrow{OP}=(x_0,y_0)$，所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x_0(x_0+2)+y_0^2=x_0(x_0+2)+\frac{x_0^2}{3}-1=\frac{4x_0^2}{3}+2x_0-1$，此二次函数对应的图象的对称轴为$x_0=-\frac{3}{4}$. 因为$x_0\geqslant\sqrt{3}$，所以当$x_0=\sqrt{3}$时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$取得最小值$\frac{4}{3}\times3+2\sqrt{3}-1=3+2\sqrt{3}$，故$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$的取值范围是$[3+2\sqrt{3},+\infty)$.

21. 已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$上存在关于直线$l:y=kx+4$对称的两点A,B，求实数k的取值范围.

解析▶ 当 $k=0$ 时，显然不成立.

当 $k\neq 0$ 时，由 $l\perp AB$，可设直线 AB 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+b$，代入 $3x^2-y^2=3$ 中，得 $(3k^2-1)x^2+2kbx-(b^2+3)k^2=0$.

$\therefore 3k^2-1\neq 0, \Delta=(2kb)^2-4(3k^2-1)[-(b^2+3)k^2]>0$，

即 $k^2b^2+3k^2-1>0$ ①.

设 AB 的中点 $M(x_0, y_0)$，由根与系数间的关系，

得 $\begin{cases} x_0=\dfrac{-kb}{3k^2-1}, \\ y_0=\dfrac{3k^2b}{3k^2-1}. \end{cases}$ $\because$ 点 $M(x_0, y_0)$ 在直线 l 上，$\therefore \dfrac{3k^2b}{3k^2-1}=\dfrac{-k^2b}{3k^2-1}+4$，

即 $k^2b=3k^2-1$ ②.

把②代入①得 $k^2b^2+k^2b>0$，解得 $b>0$ 或 $b<-1$.

$\therefore \frac{3k^2-1}{k^2}>0$ 或 $\frac{3k^2-1}{k^2}<-1$,

即 $|k|>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $|k|<\frac{1}{2}$,且 $k\neq 0$.

$\therefore k$ 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$.

22. (2016·浙江)已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{m^2}+y^2=1(m>1)$ 与双曲线 $C_2:\frac{x^2}{n^2}-y^2=1(n>0)$ 的焦点重合,e_1,e_2 分别为 C_1,C_2 的离心率,则

A. $m>n$ 且 $e_1e_2>1$　　C. $m<n$ 且 $e_1e_2>1$

B. $m>n$ 且 $e_1e_2<1$　　D. $m<n$ 且 $e_1e_2<1$

23. (2015·新课标全国I)已知 $M(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点，F_1，F_2 是 C 的两个焦点. 若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则 y_0 的取值范围是

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　　B. $(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6})$

C. $(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$　　D. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$

24. (浙江大学保送生考试)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点在双曲线上，且 $x_1\neq x_2$.

(1)若线段 AB 的垂直平分线经过点 $Q(4,0)$，且线段 AB 的中点坐标为 (x_0,y_0)，试求 x_0 的值；

(2)双曲线上是否存在这样的点 A，B，使得 $OA\perp OB$?

解析▶ (1) 由 $e=\sqrt{2}$ 知 $a=b$.

由 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 在双曲线上得 $x_1^2-y_1^2=a^2$ ①, $x_2^2-y_2^2=a^2$ ②. ①－②得: $(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$ ③.

因为 $x_1\neq x_2$, 则 AB 所在直线的斜率 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, ③式两边同除以 (x_1-x_2), 得 $k=\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$. 由于 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, 则 $k=\dfrac{x_0}{y_0}$.

而 AB 的垂直平分线的方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{k}(x-x_0)$, 即 $y-y_0=-\dfrac{y_0}{x_0}(x-x_0)$,

将点 $(4,0)$ 代入, 得 $-y_0=-\dfrac{y_0}{x_0}(4-x_0)$, 解得 $x_0=2$.

(2)方法一 由题意知，双曲线的渐近线为 $y=\pm x$.

若 A,B 在双曲线同一支上，则 OA,OB 的夹角小于$\frac{\pi}{2}$；

若 A,B 在双曲线不同支上，则 OA,OB 的夹角大于$\frac{\pi}{2}$.

综上可知，双曲线上不存在点 A,B，使得 $OA\perp OB$.

方法二 假设存在满足条件的点 A,B.

设直线 OA 的方程为 $y=kx$，则 $|k|<1$，

因为 $OA\perp OB$，所以直线 OB 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$，且 $\left|-\frac{1}{k}\right|>$

1，所以直线 OB 与双曲线无交点，故点 B 不可能在双曲线上，

所以假设不成立，即双曲线上不存在点 A,B，使得 $OA\perp OB$.

25. (2014 · 卓越联盟自主招生)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线的斜率之积为$-3$,左、右两支上分别有动点$A$和$B$.

(1)设直线AB的斜率为1,经过点$D(0,5a)$,且$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$,求实数$\lambda$的值;

(2)设点A关于x轴的对称点为M,若直线AB,MB分别与x轴相交于点P,Q,O为坐标原点. 证明$|OP|\cdot|OQ|=a^2$.

解析▶ 由$\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-3$,得$b^2=3a^2$.

(1)由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=x+5a,\end{cases}$得$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(x+5a)^2}{3a^2}=1$,所以$3x^2-(x+5a)^2=3a^2$,即$x^2-5ax-14a^2=0$,解得$x=-2a$或$x=7a$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有 $x_1=-2a$，$x_2=7a$.

由$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$得 $x_1=-\lambda x_2$，即 $-2a=-7\lambda a$，所以 $\lambda=\dfrac{2}{7}$.

(2)设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 由点 $A(x_1,y_1)$与点 M 关于 x 轴对称，可得 $M(x_1,-y_1)$.

直线 AB 的方程为 $y-y_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，令 $y=0$，得 $x=x_2-\dfrac{y_2(x_2-x_1)}{y_2-y_1}=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$，即 P 点的横坐标为$x_P=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$.

直线 MB 的方程为 $y-y_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，令 $y=0$，得 $x=x_2-\dfrac{y_2(x_2-x_1)}{y_2+y_1}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}$，即 Q 点的横坐标为 $x_Q=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}$.

因为 $\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{3a^2}=1$，所以 $x_1^2=a^2+\dfrac{y_1^2}{3}$. 同理 $x_2^2=a^2+\dfrac{y_2^2}{3}$.

所以 $|OP|\cdot|OQ|=\left|\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}\right|\left|\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}\right|=\left|\dfrac{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2}{y_2^2-y_1^2}\right|=$

$\left|\dfrac{(a^2+\frac{y_1^2}{3})y_2^2-(a^2+\frac{y_2^2}{3})y_1^2}{y_2^2-y_1^2}\right|=\left|\dfrac{a^2(y_2^2-y_1^2)}{y_2^2-y_1^2}\right|=a^2$.